Correction DS n°5

Exercice I - Inspiré ECRICOME ECT 2019

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) On calcule la limite de g en 0,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x}{x+1} = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x - 1 = -1$$

et donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = -\infty.}$$

Ainsi, on a une $\boxed{\text{asymptote verticale à la courbe en 0.}}$

(b) On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Et donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

2. La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient, composée, somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$. On a

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 + \frac{\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} \\ &= 2 + \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x} \\ &= \frac{2x(x+1)}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)} \\ &= \frac{2x^2+2x+1}{x(x+1)} > 0 \quad \text{car } x > 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } g \text{ est strictement croissante.}}$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3. On considère la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 1$.
   (a) On a d'après la question 1.b,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) - (2x-1) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.}$$

   (b) On résout l'équation

$$\begin{aligned} g(x) > 2x-1 &\iff \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) > 0 \\ &\iff \frac{x}{x+1} > 1 \end{aligned}$$

   Or cette inégalité n'est jamais vraie car $x > 0$.

$$\boxed{\text{Donc la courbe est en dessous de la droite } (\Delta).}$$

4. On montre que la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$.
   — La fonction $x \to \dfrac{x}{x+1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$. Cette fonction est strictement positive.
   — La fonction $x \to 2x-1$ est est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$.
   — La fonction ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$.

   Donc la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ g''(x) &= \frac{(4x+2)x(x+1) - (2x+1)(2x^2+2x+1)}{(x(x+1))^2} \\ &= \frac{2x(x+1)(2x+1) - (2x+1)(2x^2+2x+1)}{(x(x+1))^2} \\ &= \frac{(2x+1)(2x^2+2x-(2x^2+2x+1))}{(x(x+1))^2} \\ &= \frac{-(2x+1)}{(x(x+1))^2} < 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc concave sur }]0,+\infty[.}$$

5. (a) On sait que
   — La fonction g est continue sur $]0,+\infty[$.
   — La fonction g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
   — $g(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.

   Donc d'après le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0,+\infty[}$$

   (b) Recopier et compléter l'algorithme de dichotomie ci-dessous écrit à l'aide de `Scilab` afin qu'il affiche un encadrement de α à 10^{-2} près lorsque a et b sont choisis tels que $\alpha \in [a,b]$.

```
function y=g(x)
   y = ..2*x - 1 + log(x/(x+1))..
endfunction
a = input('Entrer la valeur de a : ')
b = input('Entrer la valeur de b : ')
while  b - a  .> 10^(-2).
     m  = ..(a+b)/2..
     if g(a)*g(m) <= 0 then
         ..b=m..
     else
         ..a = m..
     end
end
disp(..a..) // On peut mettre ici b ou (a+b)/2
```

6. Le programme `Scilab` ci-dessus affiche `0.88` comme résultat. Dans un repère orthornormé, placer le réel α sur l'axe des abscisses, tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ).

7. (a) On calcule

$$\begin{aligned}\int_1^2 \Big((2x-1)-g(x)\Big)dx &= \int_1^2 -\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx\\ &= \int_1^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx\end{aligned}$$

Les fonctions $u=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$, $v=x$ ($u'=\frac{-1}{x(x+1)}$ et $v'=1$) sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$ donc, par intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx &= \left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{-x}{x(x+1)}dx\\ &= 2\ln(3/2)-\ln(2)+\int_1^2\frac{1}{x+1}dx\\ &= 2\ln(3)-3\ln(2)+[\ln(|x+1|)]_1^2\\ &= 2\ln(3)-3\ln(2)+\ln(3)-\ln(2)\\ &= 3\ln(3)-4\ln(2)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_1^2 \Big((2x-1)-g(x)\Big)dx = \ln(27/16).}$$

(b) Interprétation graphique :

$$\boxed{\text{L'aire comprise entre la droite } (\Delta) \text{ et la courbe } (C) \text{ vaut } \ln(27/16).}$$

8. (a) On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout entier naturel n non nul par :

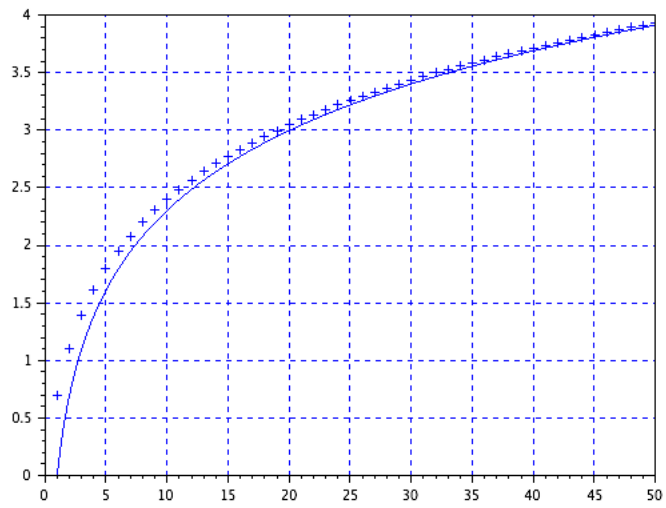
$$u_n = (2n-1)-g(n).$$

Le script `Scilab` ci-dessous construit un vecteur ligne `u` contenant les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

```
u = zeros(1,50)
for  n =1:50
    u(n) = (2*n-1)-g(n)
```

```
end
S = cumsum(u)
plot(1:50,S,'+')
```

Dans ce script, g désigne la fonction g dont le code a été complété à la question 4(b).
On exécute le script précédent et on obtient le graphique ci-dessous. Sur ce graphique, on a aussi tracé la courbe représentative de la fonction logarithme népérien ln en trait plein.



$$\boxed{\text{Le vecteur } S \text{ contient à la colonne j, le résultat de } \sum_{k=1}^{j} u_k.}$$

. Le vecteur S récapitule les termes de la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Au vu de la représentation graphique, on conjecture que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.}$$

(b) On calcule

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} -\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) \quad \text{Somme télescopique} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty.}$$

Exercice II - Inspiré d'ECRICOME ECT 2010

Cet exercice étudie deux jeux de un dés avec des dés équilibrés à six faces.

I. Étude du premier jeu.

Dans ce jeu on lance simultanément deux dés équilibrés, si les deux donnent le même résultat alors le joueur marque 1 point, sinon il ne marque pas de point.

1. On peut procéder de plusieurs façon :

   Par dénombrement : On a $\Omega = [\![1,6]\!]^2$, $\text{card}(\Omega) = 36$. Il y a 6 façons d'obtenir un double, la probabilité est donc

   $$\boxed{p = \frac{1}{6}.}$$

   En utilisant des évènements : On note A_i "obtenir le nombre i avec le premier dé" et B_i " obtenir le nombre i avec le deuxième dé". Dans ce cas, comme les évènements A_i et B_j $(i, j \in [\![1,6]\!])$ sont indépendants,

   $$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^{6} P(A_i \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} P(A_i) \times P(B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

   En utilisant des VA : On appelle X la VA égale au résultat du premier dé et Y la VA égale au résultat du second dé. X et Y sont indépendants et

   $$\begin{aligned} p = P(X = Y) &= \sum_{i=1}^{6} P(X = i \cap Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} P(X = i)P(Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2. Le joueur répète n fois le même jeu et on note alors Y_n le nombre de points obtenus par le joueur après ces n parties.

   (a) On répète n fois une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès $p = \frac{1}{6}$. Les répétitions sont indépendantes. Donc Y_n suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{6}$.

   $$\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1/6).}$$

   On a alors

   $$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(Y_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}.}$$

   (b) D'après le cours,

   $$\boxed{E(Y_n) = \frac{n}{6} \text{ et } V(Y_n) = \frac{5n}{36}.}$$

3. Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il marque un point pour la première fois.
   On note alors Z la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur.

   (a) Trouver le nombre de parties effectuées par le joueur revient à trouver l'apparition du premier succès dans la répétition d'une épreuve de Bernoulli de probabilité $p = \dfrac{1}{6}$. Z suit donc une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{6}$.

   $$\boxed{Z \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{6}\right).}$$

   On a alors

   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right).}$$

   (b) D'après le cours,

   $$\boxed{E(Z) = 6 \text{ et } V(Z) = \frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 30.}$$

II. Étude d'un deuxième jeu.

Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.

On note :

— D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé

— E_1 l'événement : $(D_1 < D_2)$, E_2 l'événement : $(D_1 = D_2)$ et E_3 l'événement : $(D_1 > D_2)$

Lors d'une partie,

— si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,

— si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,

— si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

Le joueur répète n fois ce jeu. Pour tout entier naturel $i \geq 1$, on note :

— X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{ème}$ partie ;

— S_i le nombre de points marqués après i parties.

1. On a montré dans la partie 1 que

   $$\boxed{p(E_2) = p = \frac{1}{6}.}$$

   On pourrait calculer $p(E_1)$ et $p(E_3)$ par dénombrement mais il est plus simple de remarquer que par symétrie, $p(E_1) = p(E_3) = x$ et comme

   $$\begin{aligned} p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = 1 &\iff 2x = 1 - p(E_2) \\ &\iff 2x = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

   Finalement

$$\boxed{p(E_1) = p(E_3) = \frac{5}{12}.}$$

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $X_i(\Omega) = [\![0, 2]\!]$. D'après la question précédente,

$$\boxed{P(X_i = 0) = P(E_1) = \frac{5}{12},\ P(X_i = 1) = P(E_3) = \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad P(X_i = 2) = P(E_2) = \frac{1}{6}}$$

On peut alors calculer

$$\boxed{E(X_i) = 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{12}.}$$

On calcule également

$$E(X_i^2) = 0^2 \times \frac{5}{12} + 1^2 \times \frac{5}{12} + 2^2 \times \frac{1}{6} = \frac{13}{12}$$

Ainsi, d'après la formule de Köenig-Huygens

$$\boxed{V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \frac{13}{12} - \frac{81}{144} = \frac{156}{144} - \frac{81}{144} = \frac{75}{144}.}$$

3. S_1 a la même loi que X_1.

4. Le support de S_2 est $S_2(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. On a alors Pour faire 0 points, il faut faire 0 points au premier lancer et 0 points au deuxième lancer.

$$P(S_2 = 0) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$$

Pour faire 1 points, il faut faire 1 points au premier, 0 points au deuxième ou 0 points au premier, 1 point au deuxième.

$$\begin{aligned}
P(S_2 = 1) &= P((X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 0)) \\
&= P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) \\
&= \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \\
&= \frac{50}{144}
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
P(S_2 = 2) &= P((X_1 = 0 \cap X_2 = 2) \cup P((X_1 = 1 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 0)) \\
&= P(X_1 = 0)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 0) \\
&= \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{12} \\
&= \frac{10}{144} + \frac{25}{144} + \frac{10}{144} \\
&= \frac{45}{144}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(S_2 = 3) &= P((X_1 = 1 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 1)) \\
&= P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) \\
&= \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{12} \\
&= \frac{5}{36}
\end{aligned}$$

et enfin
$$P(S_2 = 4) = P(X_1 = 2 \cap X_2 = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

5. (a) Le support de S_3 est
$$\boxed{S_3(\Omega) = [\![0, 6]\!].}$$

   (b) En utilisant le système complet d'évènement associé à S_2
$$\begin{aligned}P(S_3 = 2) &= \sum_{k=0}^{4} P(S_2 = k) P_{S_2=k}(S_3 = 2)\\ &= P(S_2 = 0)P(X_3 = 2) + P(S_2 = 1)P(X_3 = 1) + P(S_2 = 2)P(X_3 = 0) + 0 + 0\\ &= \frac{25}{144} \times \frac{1}{6} + \frac{50}{144} \times \frac{5}{12} + \frac{45}{144} \times \frac{5}{12}\\ &= \frac{50}{1728} + \frac{250}{1728} + \frac{225}{1728}\end{aligned}$$
   On a alors
$$\boxed{P(S_3 = 2) = \frac{525}{1728}.}$$

6. (a) On a
$$\boxed{S_n = X_1 + \ldots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.}$$
   Par linéarité de l'espérance
$$\begin{aligned}E(S_n) &= E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} E(X_k)\end{aligned}$$
   Et comme pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $E(X_k) = \dfrac{9}{12}$, on a
$$\boxed{E(S_n) = \frac{9n}{12}.}$$

   (b) On résout $\dfrac{9n}{12} = 10 \iff n = \dfrac{120}{9} \approx 13,3$ En moyenne, il faudra au minimum <u>14 parties</u> pour que le joueur obtienne plus de 10 points

Exercice III (A) - Probabilités

Les parties sont toutes indépendantes

Partie I

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardiovasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est $0,4$; mais si elle a fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est $0,8$; On note p_n la probabilité que cette personne ne fume pas au jour J_n et F_n l'évènement "la personne ne fume pas au jour J_n"

1. Au jour 0 (c'est-à-dire avant de commencer à arrêter de fumer) la probabilité que cette personne ne fume pas est 0

$$\boxed{p_0 = 0.}$$

2. Comme la personne fumait au jour 0, on a d'après l'énoncé

$$\boxed{p_1 = 0,8}$$

Le système $(F_1; \overline{F_1})$ est un système complet d'évènements. Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F_2) = P(F_1)P_{F_1}(F_2) + P(\overline{F_1})P_{\overline{F_1}}(F_2)$$

C'est-à-dire,

$$p_2 = 0,8 \times 0,4 + 0,2 \times 0,8$$

$$\boxed{\text{Ainsi } p_2 = 0,48.}$$

3. Le système $(F_n; \overline{F_n})$ est un système complet d'évènements. Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F_{n+1}) = P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}) + P(\overline{F_n})P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})$$

C'est-à-dire

$$p_{n+1} = p_n \times 0,4 + (1 - p_n) \times 0,8$$

$$\boxed{\text{Ainsi pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = 0,8 - 0,4p_n.}$$

On reconnait une suite arithmético-géométrique. On résout alors l'équation

$$\begin{aligned} & x = 0,8 - 0,4x \\ \iff & 1,4x = 0,8 \\ \iff & x = \frac{0,8}{1,4} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

On pose alors $v_n = p_n - \frac{4}{7}$. On obtient après calcul

$$v_{n+1} = -0,4v_n$$

La suite (v_n) est bien une suite géométrique avec $v_0 = 0 - \frac{4}{7} = -\frac{4}{7}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -\frac{4}{7} \times (-0,4)^n$$

et donc

$$\boxed{p_n = -\frac{4}{7} \times (-0,4)^n + \frac{4}{7}.}$$

4. On a $-1 < -0,4 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0,4)^n = 0$ et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{4}{7}.}$$

Cette personne ne va pas arrêter de fumer.

Partie II

Un joueur joue au jeu TETRIS et passe les niveaux 1, 2, ..., n, ... jusqu'à ce qu'il échoue. Il a une probabilité $\frac{1}{n}$ de réussir le jeu de niveau n. Soit X le numéro du dernier niveau réussi. (Il finit toujours par échouer et la réussite des niveaux sont indépendants).

1. On a

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

On note les évènements A_n : "Le joueur passe le niveau n. On a donc $P(A_n) = \frac{1}{n}$. On a alors

$$(X = k) = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}$$

Les évènements étant mutuellement indépendants, on a

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_k) \times P(\overline{A_{k+1}}) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \ldots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\boxed{P(X = k) = \frac{k}{(k+1)!}.}$$

On étudie les sommes

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} P(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \end{aligned}$$

On reconnait une somme télescopique. On peut donc conclure que la série converge et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \frac{1}{1!} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 1.}$$

2. On étudie la série $\sum_{k\geq 1} kP(X=k)$ en passant par les sommes partielles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{k}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{(k+1-1)}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{k}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

Or, on sait que les séries $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ (série exponentielle) et $\sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k+1)!}$ sont convergentes. L'espérance existe et

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = e-1}$$

On va calculer $E((X+1)(X-1))$ en utilisant la formule de transfert

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k-1)P(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+1)\frac{k}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)k(k+1)}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

La série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ est convergente et donc

$$E((X-1)(X+1)) = E(X^2-1) = e \Longleftrightarrow E(X^2) = e+1$$

D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = e+1-(e-1)^2 = 3e-e^2.}$$

Partie III

Un établissement bancaire comporte 5 guichets numérotés de 1 à 5. Le nombre N de personnes arrivant à la banque en une journée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les clients choisissent leur guichet au hasard, indépendamment les uns des autres. On note X le nombre de clients arrivant au guichet n°3 en une journée.

1. N suit une loi de Poisson de paramètre λ donc

$$\boxed{E(N) = \lambda.}$$

Le paramètre λ correspond à la moyenne des clients fréquentant la banque en une journée.

2. Sachant $N = n$, la VA X suit une loi binomiale puisque l'on compte le nombre de succès d'une répétition d'épreuve de Bernoulli. On a donc

$$\boxed{\forall k \in [\![0; n]\!], P_{(N=n)}(X_1 = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}}$$

Nous avons enfin,

$$\boxed{\forall k > n, P_{(N=n)}(X_1 = k) = 0}$$

3. En utilisant le système complet d'évènement associé à N et la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) \times P_{N=n}(X_1 = k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda} \left(\frac{1}{5}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{1}{5}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{1}{5}\right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{n!} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \left(\frac{1}{5}\right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{4}{5}\lambda\right)^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \left(\frac{1}{5}\right)^k e^{\frac{4\lambda}{5}}
\end{aligned}$$

C'est à dire ,

$$\boxed{P(X = k) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{5}} \left(\frac{\lambda}{5}\right)^k}{k!}}$$

4. La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{5}$.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\frac{\lambda}{5}\right)}$$

On en déduit que

$$\boxed{E(X) = \frac{\lambda}{5} \text{ et } V(X) = \frac{\lambda}{5}}$$

Exercice III(B) - EML 2018

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

1. **a.** Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, P_i l'événement : « Obtenir pile au i-ème lancer » et $F_i = \overline{P_i}$. On a alors

$$(X = 0) = P_1 \cap P_2$$
$$(X = 1) = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)$$
$$(X = 2) = (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4).$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n + 2)$-ème lancer et le premier à l'un des $(n + 1)$ rangs précédents. On obtient donc

$$\boxed{\begin{cases} P(X=0) & = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}, \\ P(X=1) & = 2 \times \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{27}, \\ P(X=2) & = 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{27}. \end{cases}}$$

b. Comme observé à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$-ème lancer, le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. Formellement :

$$(X = n) = \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} \left(P_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} F_j\right)\right)\right] \cap P_{n+2}.$$

Par incompatibilité et par indépendance des lancers, il vient

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \times \frac{2}{3} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{4}{3^{n+2}} \\ &= (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.}$$

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

2. **a.** U prend clairement des valeurs entières positives et, pour chaque entier n, il existe une suite de tirages amenant à n Face et 2 Pile suivi d'un tirage de la boule numérotée n. Autrement dit,

$$\boxed{U(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $(X = n)$, l'urne est composée de $(n+1)$ boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à n donc

$$\boxed{U^{(X=n)} \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, n \rrbracket).}$$

c. Soit $k \in \mathbb{N}$. On commence par observer que $(U = k) \cap (X = n) = \emptyset$ si $n < k$ car on ne peut pas tirer une boule numérotée k dans une urne contenant des boules numérotées de 0 à n si $k > n$. Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $\left\{(X = n)_{n \in \mathbb{N}}\right\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(U = k \cap X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(U = k \cap X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(X=n)}(U = k) P(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n) \quad \text{(d'après } \mathbf{2.b}\text{)}, \end{aligned}$$

ce qui établit la première égalité.
En injectant le résultat trouvé en **1.b**, il vient

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} \\ &= 4 \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} \\ &= 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k+2}} \\ &= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1 - 1/3} \\ &= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.}$$

d. U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} k P(U = k)$ converge absolument. Les valeurs prises par U étant positives, ceci équivaut à la convergence de la série. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} kP(U=k) &= \sum_{k\geq 0} k\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \sum_{k\geq 1} k\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \frac{2}{9}\sum_{k\geq 1} k\frac{1}{3^{k-1}}\\ &= \frac{2}{9}\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée de raison $1/3$. La série converge donc et alors

$$\begin{aligned}E(U) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U=k)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{3^{k-1}}\\ &= \frac{2}{9}\times\frac{1}{(1-1/3)^2}\\ &= \frac{2}{9}\times\frac{9}{4}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E(U)=\frac{1}{2}.}$$

Pour déterminer la variance, on commence par étudier l'espérance de $U(U-1)$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} k(k-1)PU=k &= \sum_{k\geq 2} k(k-1)\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \frac{2}{27}\sum_{k\geq 2} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}.\end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois de raison $1/3$, il s'agit donc d'une série convergente, et plus précisément absolument convergente puisque ses termes sont positifs. Il suit donc du théorème de transfert que $U(U-1)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}
E(U(U-1)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(U=k) \\
&= \frac{2}{27}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\
&= \frac{2}{27} \times \frac{2}{(1-1/3)^3} \\
&= \frac{2}{27} \times \frac{2\times 27}{8} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Mais alors $U^2 = U^2 - U + U = U(U-1) + U$ admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance et

$$E(U^2) = E(U(U-1)) + E(U) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens que :

$$\boxed{V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.}$$

3. **a.** V prend clairement des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un tirage amenant à n Face et deux Pile suivi d'un tirage de la boule 0, auquel cas $(V = n)$ est réalisé. Ainsi,

$$\boxed{V(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $V^{(X=n)}$ prend ses valeurs entre 0 et n et, pour tout $k \in \iint 0n$, on a

$$\begin{aligned}
P_{(X=n)}(V=k) &= P_{(X=n)}(X-U=k) \\
&= P_{(X=n)}(U=n-k) \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{V^{(X=n)} \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0,n \rrbracket).}$$

c. En reprenant les calculs effectués en **2.b**, on observe que la loi de V est la même que celle de U. Autrement dit,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(V=k) = \frac{2}{3^{k+1}}.}$$

Partie III : Étude d'un jeu

1. Simulation informatique

a. On propose la fonction suivante :

```
function x = simule_X()
    nPile = 0
    nFace = 0
    while (nPile<2)
        if (rand()<2/3)
            nPile = nPile +1
        else
            nFace = nFace +1
        end
    end
    x = nFace
endfunction
```

b. La fonction proposée dans l'énoncé calcule la fréquence, sur 10 000 simulations, des victoires de A.

c. On observe que pour $p \approx 0,8$, on obtient une fréquence de victoires de A approximativement égale à 50%. Ainsi :

$$\boxed{\text{Le jeu est équilibré pour } p \approx 0,8.}$$

2. Étude de la variable aléatoire Y

a. Z compte le rang du premier succès (« obtenir Pile ») dans une suite indéfinie de répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes (lancer la pièce), de même paramètre (p, la probabilité de faire Pile). Ainsi,

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathscr{G}(p).}$$

b. Y étant le nombre de Face obtenus jusqu'au premier Pile, on a la relation $Y = Z - 1$. Il s'ensuit que Y admet une espérance et une variance et que

$$\boxed{E(Y) = E(Z-1) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}}$$

et

$$\boxed{V(Y) = V(Z-1) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.}$$

c. Posons $q = 1 - p$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(Y \geq n) &= P(Z - 1 \geq n) \\
&= P(Z \geq n + 1) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Z = k) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} \\
&= pq^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-(n+1)} \\
&= pq^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\
&= pq^n \times \frac{1}{1-q} \\
&= q^n.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y \geq n) = (1-p)^n.}$$

3. **a.** En appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned}
P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n \cap X \leq Y) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n \cap Y \geq n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P(Y \geq n) \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes).}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P(Y \geq n).}$$

b. En injectant les résultats établis en **1.b** et **7.c** dans la formule trouvée en **8.a**, on a :

$$\begin{aligned}
P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y \geq n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}q^n \\
&= \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{q}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{4}{9} \times \frac{1}{(1-q/3)^2} \\
&= \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{3-q}\right)^2 \\
&= \frac{4}{(3-q)^2} \\
&= \frac{4}{(2+p)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{P(X \leq Y) = \frac{4}{(2+p)^2}.}$$

c. Le jeu est équilibré quand $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire quand $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$. Or

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 8 = (2+p)^2 \\
&\Leftrightarrow p^2 + 4p - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow p \text{ est racine de } X^2 + 4X - 4 \\
&\Leftrightarrow p \in \left\{-2-2\sqrt{2},\ -2+2\sqrt{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Mais $-2-2\sqrt{2} < 0$ et $-2+2\sqrt{2} > 0$ et p est nécessairement positif. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le jeu est équitable pour } p = 2\sqrt{2}-2.}$$

Remarque : On a $\sqrt{2} \approx 1,41$ donc $2\sqrt{2}-2 \approx 0,82$, ce qui est cohérent avec la réponse déterminée numériquement à la question **6.c**.